

Шестаков Олег Владимирович

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ.

- В. Ю. Крайев. Теория вероятностей и математическая статистика. 2006
- В. Фишер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 1984.
- В. Ю. Крайев, В. С. Бенин, С. Я. Шерин. Математические основы теории риска.
- В. Ю. Крайев. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. 2007.

Опр. Вероятностная модель - математическая модель реального процесса или явления, содержащего элемент случайности (неустраняемой неопределенности).

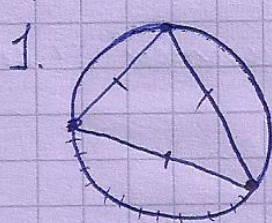
Условия адекватности:

1. Наличие случайности
2. Воспроизводимость
3. Устойчивость частот

$$\frac{n(A)}{n} \rightarrow p$$

Парадокс Бертраана.

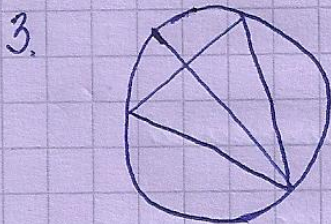
с какой вероятностью наугад выбранная хорда окружности имеет длину, большую, чем длина правильного Δ , вписанного в эту окружность.



$$p = \frac{1}{3}$$



$$p = \frac{1}{4}$$



$$p = \frac{1}{2}$$

Вероятностное пространство.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, Ω -мн-во элементарных исходов;

$\mathcal{A}$ - класс подмн-в Ω (σ -алгебра): 1. $\Omega \in \mathcal{A}$,

2. $A \in \mathcal{A} \rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$, 3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$;

P - вероятностная мера: $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

$P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$, $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

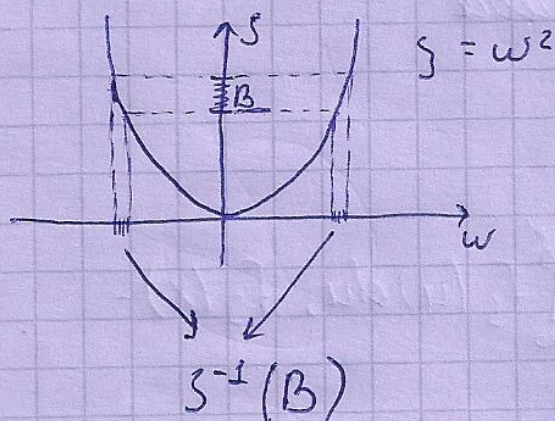
$$\Omega = [0, 1] \quad [a, b) \quad P([a, b)) = b - a$$

Теорема о продолжении меры $\exists$ и ! мера P на $\sigma([a, b))$, т.ч. $P([a, b)) = b - a$.

опр. с.в. ζ , заданная на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\zeta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$.

$$\zeta^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \zeta^{-1}(B) = \{\omega: \zeta(\omega) \in B\}$$



$$P(\zeta \in B) = P(\omega: \zeta(\omega) \in B)$$

$\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$ распре-е с.в. ζ .

$$P_\zeta(B) = P(\zeta \in B)$$

Индукцированное вер-ое пр-во $(\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}), P_\zeta)$.

① $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

если $\mathcal{A} = \sigma([0, 1])$

$\zeta = \omega$ не явл. с.в.

$\zeta = \omega$ явл. с.в.

$$B = [0, \frac{1}{2}] \quad \zeta^{-1}(B) = [0, \frac{1}{2}]$$

② $\zeta = 10$

$$\forall B \xrightarrow{10 \in B} \zeta^{-1}(B) = \Omega$$

$$\forall B \xrightarrow{10 \notin B} \zeta^{-1}(B) = \emptyset$$

явл. с.в.

Ф. распре-я с.в. ζ $F_\zeta(x) = P(\zeta < x) = P(\zeta^{-1}((-\infty, x)))$

Св-ва ф-ии распре-я:

$$1. 0 \leq F_S(x) \leq 1$$

2. $F_S(x)$ не убывает

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} F_S(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F_S(x) = 0$$

4. $F_S(x)$ непрерывна слева

Типы распределений:

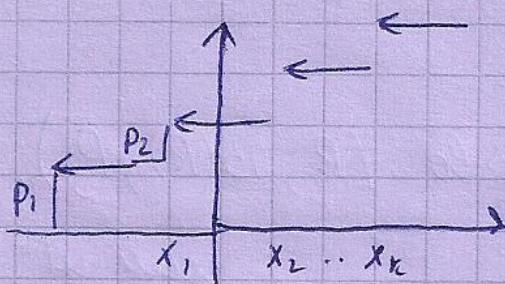
а) абс. непрерывное

$$\exists f_S(x): F_S(x) = \int_{-\infty}^x f_S(u) du, f_S(x) -$$

- плотность распр-я

б) дискретное $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$$P(Z = x_k) = p_k, k = 1, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$



в) смешанное

Математические модели центра случайной величины.

① Математическое ожидание ζ .

$$E\zeta = \int_{\Omega} \zeta P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{\zeta}(x)$$

а) дискр. $E\zeta = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i P(\zeta = x_i)$

б) абс. непр. $E\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\zeta}(x) dx$

Св-ва мат. ожидания:

1. линейность

2. единственность

3. не всегда существует

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad X_1, \dots, X_n - \text{н.о.р.с.в.}$$

4. не устойчиво к выборке

$$|a - b|^2$$

$$E|a - \zeta|^2 = a^2 - 2aE\zeta + E\zeta^2 - \text{парабола,}$$

минимум в вершине, а вершина $E\zeta$.

$$\arg\min_a E|\zeta - a|^2 = E\zeta$$

② Медиана с.в.

Опр. Квантиль порядка q (q -квантиль) с.в. ζ

называется такая т. X_q : $P(\zeta < X_q) \leq q$, $P(\zeta \leq X_q) \geq q$,

$$F_{\zeta}(X_q-) \leq q, \quad F_{\zeta}(X_q+) \geq q.$$

$q \in (0, 1)$.

Если $F_{\zeta}(x)$ непр. в $X_q \Rightarrow F(X_q) = q$.

Медиана z - квантили z порядка $\frac{1}{2}$.

Как строить?

$$X_1, \dots, X_n$$

$X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ - вариационный ряд

$med_n = X_{(k+1)}$, $n = 2k+1$, если четная, то
посредине двух около центра.

Свойства медианы:

1. Всегда существует
2. Может быть не единственным
3. Медиана устойчива к выбросам.

$$|a - b|$$

$$E|a - z|$$

$\exists a > med z$ (если $\leftarrow$ аналогично)

$$|z - a| = |z - med z| = \begin{cases} med z - a, & z \geq a \\ med z + a - z, & med z < z < a \\ a - med z, & z \leq med z \end{cases} \quad \text{②}$$

$$\begin{aligned} med z - a \\ med z - a \\ a - med z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E|z - a| - E|z - med z| &\geq (med z - a)EI(z \geq a) + \\ &+ (med z - a)EI(med z < z < a) + (a - med z)EI(z \leq med z) = \\ &= (med z - a)P(z > med z) + (a - med z)P(z \leq med z) \quad \text{③} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a - \text{med}_Z) (P(Z \leq \text{med}_Z) - P(Z > \text{med}_Z))$$

③ Мода с.в.

Z - дискретная с.в. $\text{mod}_Z = x_k: P(Z \leq x_k) \geq P(Z = x_i) \forall i=1, \dots$

- то значение, которое принимается с наибольшей вероятностью.

Z - абс. непр. с.в. $\text{mod}_Z: f(\text{mod}_Z) \geq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ -

- точка максимума плотности (или локального максимума), f - кусочно-непрерывная.

Пример $P(Z \geq x) = e^{-x}$

$$E_Z = 1, \quad \text{med}_Z = \ln 2 \approx 0.7, \quad \text{mod}_Z = 0$$

Математические модели разброса значений с.в.

$$1. D_Z = E(Z - E_Z)^2 \text{ - дисперсия: } D_Z \geq 0$$

$\sigma = \sqrt{D_Z}$ - среднее
квадратическое
отклонение

$$D_Z = 0 \Leftrightarrow Z = \text{const почти наверн.}$$

$$D(cZ) = c^2 D_Z$$

$$2. E|Z - E_Z| \text{ - штирха}$$

$$3. E|Z - \text{med}_Z|$$

$$4. X_{\frac{3}{4}} \text{ - квантили порядка } \frac{3}{4}, \quad X_{\frac{1}{4}} \text{ - квантили порядка } \frac{1}{4},$$

$$IQR = X_{\frac{3}{4}} - X_{\frac{1}{4}}$$

$$5. R = \max Z - \min Z$$

$$6. M.A.D. = \text{med}|Z - \text{med}_Z|$$

$$(J_2, A, P) \quad A, B \in A$$

$$P(\text{mg milk}) = \frac{1}{52} + \text{group}$$

$$P(\text{mg}) = \frac{4}{52}$$

$$P(\text{mug max}) = \frac{1}{53}$$

$$P(\text{max}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{mg}) = \frac{4}{53}, P(\text{mx}) = \frac{13}{53}$$

my abuser

jabucuuu

$A_1, \dots, A_n$ columns
 $\forall 1 \leq k \leq n$
выбравшие
 $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$P(A_1, \dots, A_k) = \prod_{j=1}^k P(A_j)$$

Li. b. 5 u 7 unabhängig, es sei $\forall \beta_1, \beta_2 \in B$

$$P(\beta \in B, \eta \in B_2) = P(\beta \in B)P(\eta \in B_2)$$

$$z^2 + \eta^2 = 1$$

$$\zeta^2 + \eta^2 = 2$$

$$s \sim R[0, 2\pi]$$

$$S_1 = \cos 3$$

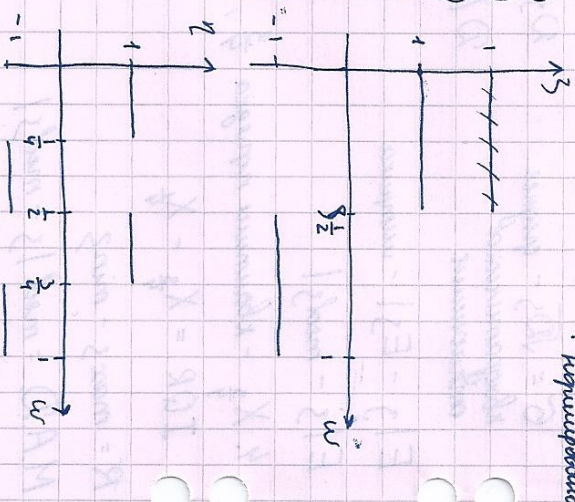
$$J_2 = \sin \gamma$$

$$S_1^2 + S_2^2 = 1$$

S_1, S_2, S_3

$$p(\beta=1, \eta=1) = \frac{1}{4}$$

$$= P(Z=1)P(Y=1) =$$



webpage

$$D(s+2) = D_3 + D_2.$$

оправное решение

$$\text{cov}(\beta, \eta) = E(\beta - E\beta)(\eta - E\eta) \text{ матрица ковариаций}$$

अनुसूचित

$$\rho(s, \eta) = \frac{\text{cov}(s, \eta)}{\sqrt{\text{var}(s) \text{var}(\eta)}}$$

- көрсетулер мен қорықтар

$$|p(s, \eta)| \leq 1 - \delta \text{ every KGLL}$$

Виды сходимости случайных величин.

1. Почти всюду (почти наверное, с вероятностью 1)

$X_1, \dots, X_n, \dots$ с.в.

$$X_n \xrightarrow{\text{п.в.}} X: P(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

2. По вероятности

$$X_n \xrightarrow{P} X: \forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3. В среднем порядка $r > 0$ (вообще говоря $r \neq 1$, но положим > 0).

$$X_n \xrightarrow{r} X: E|X_n - X|^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Пр. $\begin{cases} e^n & [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ Положим игра-игра Лебеля.

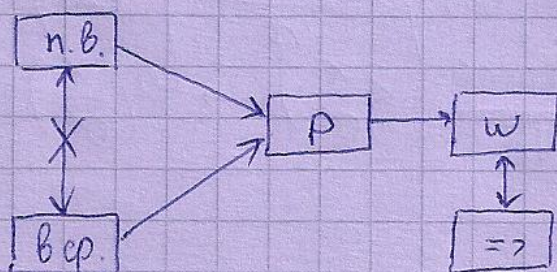
Сходится п.в. везде, кроме 0, нет сходимости в среднем.

4. Слабая сходимость

$$X_n \xrightarrow{w} X: \forall \varphi - \text{непр. и огр.} \quad E\varphi(X_n) \rightarrow E\varphi(X).$$

5. Сходимость по распределению

$$X_n \Rightarrow X: F_n(X) \rightarrow F(X) \quad \forall X - \text{т. непрерывности } F(X).$$



Зам. В 1, 2, 3 графиках с. 8, в 4, 5 -

- не рассуждаем.

Число было выбрано 5, а 1, 2 выбраны
 эмас в условии много, когда будем иметь се-ма-к
 константа.

$X_1, \dots, X_n$ - независимы.

354 $X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.е.б. и независимы

$a = EX_1 = \dots = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \rightarrow a$ (константа).

411 $X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.е.б. и $\exists a = EX_1, \sigma^2 = DX_1$

$0 < \sigma^2 < \infty$ (выб-ем константу квадрата)

$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi(x)$ (функция), $\Phi(x) = \Phi(x) - \Phi(x)$

Зам. В 354 требуется константа / нулю

нормализованности константы), в 411 -

- константа и константа.

$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$

$r(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ - скорость сходимости к 354.

$P(\sqrt{n} Z_n < x) = P\left(\sqrt{n} \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \right| < x\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma} < x\sqrt{n}\right)$

$\frac{x}{\sigma} = P\left(-\frac{x}{\sigma} < \frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{x}{\sigma}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right) =$

$= 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1.$

Нер-бо Деппи-Зенна

+ к числу 354 $\exists \mu_3 = E|X_1 - a|^3$ Тогда

$\sup \left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C \mu_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}, 0 < C < 0.5$

норму будем использовать $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

$P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0.997$, с. 8 X - норм. $N(a, \sigma^2)$

$P(|X - a| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$ - н.о.р.е.б. Чебышев.

$\Rightarrow P(|X - a| > 3\sigma) \leq \frac{1}{9}.$

354 $X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.е.б., $a_i = EX_i, \sigma_i^2 = DX_i$

$F_n(x) = P(X_1 < x)$

$A_n = \sum_{i=1}^n a_i, B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, F_n = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - A_n}{B_n} < x\right)$

(*) вы. функция: $B_n^2 \rightarrow \infty, \int_{|x-a_i| > \varepsilon B_n} \rho(|x-a_i|^2) dF_n(x) \rightarrow 0$

Или же функция - функция $X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.е.б. и

бесконечности (*). Тогда $\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0$ и

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x-a_i| > \varepsilon B_n} P(|X_1 - a_i| > \varepsilon B_n) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ (**).

Оценим $\frac{\sigma_i^2}{B_n^2}$.

$\sigma_i^2 = \int |x-a_i|^2 dF_i(x) = \int |x-a_i|^2 dF_n(x) +$

$+ \int |x-a_i|^2 dF_i(x) \leq \int_{|x-a_i| > \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_n(x) +$

$+ \int_{|x-a_i| \leq \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_i(x) \leq \int_{|x-a_i| > \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_n(x) + \int_{|x-a_i| \leq \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_i(x) \leq$

$\int_{|x-a_i| > \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_n(x) + \int_{|x-a_i| \leq \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_i(x) \leq$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{B_n^2} \leq \varepsilon^2 + \frac{\int |x - a_1|^2 dF_1(x)}{B_n^2} \leq \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_1| > tB_n} |x - a_1|^2 dF_1(x) \Rightarrow \frac{\sigma_1^2}{B_n^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Bedeutung $\frac{\sigma_1^2}{B_n^2} : \varepsilon^2 < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_1| > tB_n} |x - a_1|^2 dF_1(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\limsup_{1 \leq i \leq n} P(|X_i - a_1| > \varepsilon B_n) = 0$$

$$P(|X_1 - a_1| > \varepsilon B_n) \leq \varepsilon^2 B_n^2 = \varepsilon^2 B_n^2 \int dF_1(x) =$$

$$\int \varepsilon^2 B_n^2 dF_1(x) \leq \int_{|x-a_1| > \varepsilon B_n} |x - a_1|^2 dF_1(x) \leq \int_{|x-a_1| > \varepsilon B_n} |x - a_1|^2 dF_1(x)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_1| > \varepsilon B_n} (X_i - a_1)^2 dF_1(x)$$

$$\Rightarrow P(|X - a_1| > \varepsilon B_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_1| > \varepsilon B_n} |x - a_1|^2 dF_1(x)$$

$$M_2^3 = E|X - a_1|^3 \quad M_2^3 = \sum_{i=1}^n M_i^3$$

$$\text{var. konvergenz} \quad \frac{M_n^3}{B_n^3} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{u.N.T.}$$

$$\int_{|x-a_1| > tB_n} |x - a_1|^2 dF_1(x) \leq \int_{|x-a_1| > tB_n} |x - a_1|^2 \frac{1}{tB_n} dF_1(x) =$$

$$\leq \frac{1}{tB_n} \int_{|x-a_1| > tB_n} |x - a_1|^3 dF_1(x) \leq \frac{1}{tB_n} \int_{|x-a_1| > tB_n} |x - a_1|^3 dF_1(x)$$

$$\Rightarrow |x| \leq \frac{M_n^3}{tB_n^3}$$

$$X_1, \dots, X_n - \text{uop.c.} \quad \alpha = E X_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad P(|\bar{X} - \alpha| < \varepsilon)$$

X-ypob. pobepus

$$P\left(\frac{\sqrt{n}}{2} |X - a| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2}\right) - 1 = J$$

$U_{1+x}^{\text{Riemann}} \quad \mathcal{E} = \frac{\sigma U_{1+x}^{\text{Riemann}}}{\sqrt{n}}$

$$\frac{M^3}{\sigma^3} C_0 = L_3$$

$$\text{cum } \frac{1+x}{2} + \frac{B_3}{\sqrt{n}} > 1$$

$X_1, \dots, X_n \sim \text{nopeb} \quad X_i \sim \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad p$

$$\sum_{i=1}^n X_i \quad E \sum_{i=1}^n X_i = np \quad D \sum_{i=1}^n X_i = npq$$

~~Результат~~

Th: n независимых $X_1, \dots, X_n \sim \text{nopeb} \quad X_i \sim \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \quad p$

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{1}{n} + 2 \log \frac{1}{3} \leq \frac{k}{n} \leq R_n(k) \leq \frac{1}{n} + \frac{2 \log \frac{1}{3}}{n}$$

$$2 \cdot 60 \cdot P(S = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(np)^k (1 - \frac{1}{n})^{n-k}}{k!} e^{-np} (1-p)^{n-k} e^{np}$$

$$\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^n \int_{|X-a| > \varepsilon B_n} |X-a|^2 dF_i(X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq n} P(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0$$

$$P(|X_i - a_i| > \varepsilon B_n) \leq \sum_{i=1}^n \int_{|X_i - a_i| > \varepsilon B_n} |X_i - a_i|^2 dF_i(X) = \int_{|X-a| > \varepsilon B_n} |X-a|^2 dF(X)$$

$$\Rightarrow P(|X-a_i| > \varepsilon B_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} |X-a_i|^2 dF_i(X)$$

используем неравенство Чебышева $\frac{M_n^3}{B_n^3} \rightarrow 0 \Rightarrow LNT$

$$\int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} |X-a_i|^2 dF_i(X) \leq \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} |X-a_i|^2 \frac{1}{\varepsilon B_n} dF_i(X) = \frac{1}{\varepsilon B_n} \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} |X-a_i|^3 dF_i(X)$$

$$dF_i(X) \leq \frac{1}{\varepsilon B_n} \int_{|X-a_i| > \varepsilon B_n} |X-a_i|^3 dF_i(X) \Rightarrow |X| \leq \frac{M_n^3}{\varepsilon B_n^3}$$

$X_1, \dots, X_n \sim \text{nopeb}, \quad a = EX_i$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad P(|\bar{X} - a| < \varepsilon)$$

δ - малое положительное

$$P\left(\frac{\sqrt{n}}{2\delta} |X - a| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2\delta}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2\delta}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2\delta}\right) - 1 = J^*(*)$$

$U_{1+x}^{\text{Riemann}} \quad \text{оценку сверху получаем } M(0,1)$

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1+x}^{\text{Riemann}}$$

B случай верхняя граница

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{C_0 M^3}{\sqrt{n} G^3} = Lm^3$$

$$(*) \Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{2\delta}\right) - 1 - 2Lm^3 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} U_{1+x}^{\text{Riemann}} + L_3 m$$

если $\frac{1+x}{2} + L_m \geq 1$, то возможно не будет
ответов

$$L_m \geq \frac{0.4}{\sqrt{n}}, \text{ если } n = \frac{0.64}{(\delta-\gamma)^2} = \text{возможно}$$

гребенчатого шмеля или

Теорема (Пугачова)

$$\exists X_1, \dots, X_{n-1} \text{ н.о.р.с.б.}, X_i \sim \begin{cases} 1, p \\ 0, q=1-p \end{cases}$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$DS_n = npq, E S_n = np$$

если группа буста (пугачова от 0 и 1)

=) нулевая шпт. Moore и не будет нуле-

нам (джен от бустов популяции)

$$\exists np = \lambda$$

$$\text{Теорема } X_1, \dots, X_n \text{ н.о.р.с.б.}, X_i \sim \begin{cases} 1, p \\ 0, q=1-p \end{cases}$$

$$p \leq \frac{1}{4}, k-1 \leq \frac{n}{4}, \exists \lambda = np$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$P(S_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda + R_n(k)}}{k!}$$

$$\frac{\lambda k}{n} + 2 \log \frac{4}{3} \frac{k(1-k)}{n} - \frac{2\lambda^2}{3n} \leq R_n(k) \leq \frac{\lambda^k}{n} +$$

$$+ \frac{k(1-k)}{2n}$$

$$R_0 - b_0:$$

$$R_n(k) = \log(1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{k+1}{n})(1-p)^{n-k} e^{np} \leq \log(1-x) \leq -x, x \in (0,1)$$

$$\leq -\sum_{i=1}^k \frac{1}{n} - (n-k)p + np \leq \frac{\lambda k}{n} + \frac{k(1-k)}{2n}$$

среди ответов

$$\frac{\sum (X_i - a)}{\sigma \sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - a}{\sigma \sqrt{n}}$$

$$X_{n1}, \dots, X_{nn}$$

Среднее значение, $\{X_{ni}\}$ - с.р.с.б. с.р.с.б. X_{n1}

$$\exists np, \rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} S_n \approx \sum X_i$$

Доп. $q, p, G(x)$ и с.р.с.б. с.р.с.б. $g(t)$ макс-м

генерации, если $t a, a \in \mathbb{R}^+, \exists a > 0$

и $b \in \mathbb{R} : f(a, t) p(a, t) = f(a, t) e^{bt}$

$$G(a, x + b_1) \cdot G(a, x + b_2) = G(a, x + b)$$

$$p(t) = \exp(1) a t - e/t / (1 + i b t / t) Q(t, x)$$

$$Q(t, x) = \frac{1}{\pi \log t} \alpha = 1 \quad \alpha \in (0, 2)$$

Все ген. попул. с.р.с.б. с.р.с.б. с.р.с.б. с.р.с.б. с.р.с.б.

$$\alpha = 2 - \text{нормальное}$$

$$\alpha = 1 - \text{параметр. конн}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \text{параметр. дебр}$$

$G_2(x)$ - g.p. generalization
 necessary and $\alpha \in \mathbb{C}$

$$G_2(-x) + \int_0^1 G_2(x) \sim \frac{G}{x^2} \quad x \rightarrow \infty$$

Proposition (Hecke): $x_1, \dots, x_n =$

some fixed hyperreal

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i - a_n}{b_n} \quad \text{new.}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad 1/b_n \in \mathbb{R} \quad + \infty$$

On p.p. $F(x)$ is comb. re

~~some~~ comp. points, can

$$x.p. p. f(t) = f_n(t)$$

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x)$$

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

распр. D_n не зависит от F

Т. Колмогорова: $\lim P(\sqrt{n} D_n < x) = K(x)$

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} \quad x \rightarrow \infty$$

ε - точность, γ - надежность

$$P(D_n < \varepsilon) \geq \gamma$$

$$P(\sqrt{n} D_n < \varepsilon \sqrt{n}) \approx K(\varepsilon \sqrt{n}) = \gamma$$

K_γ - квантили K порядка γ

$$\varepsilon \sqrt{n} = K_\gamma \Rightarrow n = \frac{K_\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

Опр $I(A|B)$ - кол-во информации, содерж. в событии B относительно сод. A .

$$I(A|B) = \log_a \frac{P(A|B)}{P(A)} \quad a > 1$$

Опр $I(A) = I(A|A) = -\log_a P(A)$

1. чем меньше вер-ть, тем больше информации
2. если A и B независ. $\Rightarrow I(A|B) = 0$
3. если A и B независ. $I(AB) = I(A) + I(B)$

$I(F(x))$ - непр.

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x)$$

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad \text{где непр } F$$

распр. D_n не зависит от F

Если F достаточно гладко ($n \geq 20$) рекомендуют пользоваться Теоремой Колмогорова: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} D_n < x) = K(x)$ - ф.р. Колмогорова.

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$$

ε - точность, γ - надежность

$$P(D_n < \varepsilon) \geq \gamma$$

$$P(\sqrt{n} D_n < \varepsilon \sqrt{n}) \approx K(\varepsilon \sqrt{n}) = \gamma$$

K_γ - квантили K порядка γ

$$\varepsilon \sqrt{n} = K_\gamma \Rightarrow n = \frac{K_\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

Опр $I(A|B)$ - количество информации, содержащееся в событии B относительно события A .

$$I(A|B) = \log_a \frac{P(A|B)}{P(A)}$$

Опр $I(A) = I(A|A) = -\log_a P(A)$
 $a > 1$

1. чем меньше вероятность, тем больше информации
2. если A и B независимы $\Rightarrow I(A|B) = 0$.

$G_2(x)$ - гр.р. устойчивого закона с показателем $\alpha \in (0, 2)$

$$G_2(-x) + 1 - G_2(x) \sim \frac{C}{|x|^\alpha} \quad x \sim G_2(x) \Rightarrow |E(x)|^\alpha < \infty$$

$\alpha < 2$ и ~~при~~ $\alpha \geq 2$

Теорема (Лева): $X_1, \dots, X_n$ - н.с.в. гр.р. $G(x)$ может быть предельной р.н.

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - a_n}{b_n} \quad \text{при нек. выборе}$$

$$a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad b_n \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow G(x) \text{ - устойчив.}$$

Опр гр.р. $F(x)$ и соотв. хар. ф. $f(t)$ наз-ся беспр. р.н., если $\forall n \in \mathbb{N} \exists f_n(t)$.

$$\text{хар. ф. } f(t) = (f_n(t))^n$$

$$f(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{matrix} X_{11} & & X_{n1} \\ X_{21} - X_{22m} & & \text{и с.в.} \\ & & \text{и} \end{matrix}$$

$$X_{n1}, \dots, X_{nm}$$

Теорема (Линкина):

$\{X_n\}$ - сжима серия и $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} P(|X_i| \geq \epsilon) = 0$

$F(x)$ может быть предельн. р.н. $S_n \Leftrightarrow f(t)$ - беспр. р.н.

$$X_{ni} \sim \begin{matrix} 1 & p_{ni} \\ 0 & q_{ni} \end{matrix}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} p_{ni} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Теор (обобщ. т. Пуассона):

$\max p_{ni} \rightarrow 0$ и X_{ni} - ехем. серия

$$\sum_{i=1}^n p_{ni} \rightarrow \lambda > 0 \quad S_n = \sum X_{ni}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Д-во: $\varphi_x(z) = E z^X \quad |z| \leq 1$

$$\varphi_{X_{ni}}(z) = 1 - p_{ni} + z p_{ni} = 1 + p_{ni}(z-1)$$

$$\varphi_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^n (1 + p_{ni}(z-1))$$

$$\log \varphi_{S_n}(z) = \sum_{i=1}^n \log(1 + p_{ni}(z-1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sim$$

$$\sum_{i=1}^n p_{ni}^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} p_{ni} \sum_{i=1}^n p_{ni} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\sim \sum_{i=1}^n p_{ni} (z-1) \rightarrow \lambda(z-1)$$

$$\Rightarrow \varphi_S(z) \rightarrow e^{\lambda(z-1)} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \frac{\lambda^i}{i!} (z-1)^i)$$

$X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.с.в. $X_i \sim F(x)$ $\square F(x)$ -непр.

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x)$$

$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)|$$

распр. D_n не зависит от F

Т. Колмогорова: $\lim P(\sqrt{n} D_n < x) = K(x)$

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$$

ε - точность, γ - надежность

$$P(D_n < \varepsilon) \geq \gamma$$

$$P(\sqrt{n} D_n < \varepsilon \sqrt{n}) \approx K(\varepsilon \sqrt{n}) = \gamma$$

K_γ - квантиль K порядка γ

$$\varepsilon \sqrt{n} = K_\gamma \Rightarrow n = \frac{K_\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

Опр $I(A|B)$ - кол-во информации, содержащееся в событии B относительно сод. A .

$$I(A|B) = \log_a \frac{P(A|B)}{P(A)} \quad a > 1$$

$$\text{Опр } I(A) = I(A|A) = -\log_a P(A)$$

1. чем меньше вер-ть, тем выше информация
2. если A и B независ. $\Rightarrow I(A|B) = 0$
3. если A и B независ. $I(A|B) = I(A) + I(B)$

$X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.с.в. $X_i \sim F(x)$

$\square F(x)$ - непр.

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x)$$

$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| \text{ - для непр } F$$

распр. D_n не зависит от F

Если F достаточно гладко ($n \geq 20$) рекомендуют

пользоваться Теоремой Колмогорова: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} D_n < x) = K(x)$ - ф.р. Колмогорова.

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}$$

ε - точность, γ - надежность

$$P(D_n < \varepsilon) \geq \gamma$$

$$P(\sqrt{n} D_n < \varepsilon \sqrt{n}) \approx K(\varepsilon \sqrt{n}) = \gamma$$

K_γ - квантиль K порядка γ

$$\varepsilon \sqrt{n} = K_\gamma \Rightarrow n = \frac{K_\gamma^2}{\varepsilon^2}$$

Опр $I(A|B)$ - количество информации, содержащееся в событии B относительно события A .

$$I(A|B) = \log_a \frac{P(A|B)}{P(A)}$$

$$\text{Опр } I(A) = I(A|A) = -\log_a P(A) \quad a > 1$$

1. чем меньше вероятность, тем больше информация
2. если A и B независимы $\Rightarrow I(A|B) = 0$.

3. если A и B независимы, то

$$I(AB) = I(A) + I(B)$$

$E: A_1 \dots A_n$

$$I(A_1) \dots I(A_n) \quad p_1 \dots p_n \quad p_i = P(A_i), \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$Q(E)$ - с.в. с $I(A_i) \quad p_i = P(A_i)$

$$H(E) = \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

$H(E)$ - энтропия эксперимента E .

Теорема $\mathbb{J}E$ - эксперимент с n исходами $A_1 \dots A_n$,

$p_i = P(A_i)$, $H(E)$ - энтропия E .

$$1) H(E) \geq 0 \quad H(E) = 0 \Leftrightarrow \exists i^* \in \{1 \dots n\} : p_{i^*} = 1, p_i = 0 \quad i \neq i^*$$

$$2) \mathbb{J}E_0 - \text{эксперимент с } n \text{ исходами } p_i = \frac{1}{n}, i = 1 \dots n$$

$E - \mathbb{J}$ эксперимент с n исходами

$$H(E_0) \geq H(E)$$

3) E - эксперимент с n исходами, E_1 - получ. из E объединением A_i и A_j ($n-1$ исход)

$$E_2 - \text{эксперимент с исх. } A_1 \dots A_j \quad P(A_i) = \frac{p_i}{p_i + p_j}$$

$$P(A_j) = \frac{p_j}{p_i + p_j}, \quad H(E) = \mathbb{E} H(E_1) + (p_i + p_j) H(E_2)$$

4) $H(E)$ зависит только от $p_1 \dots p_n$, является симметричной и непрерывной ф-ей от p_i .

D-во:

$$1) g(p) = -p \log p \quad g(0) = 0 \quad g(p) \geq 0 \quad g(p) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = 1 \text{ или } 0 \Rightarrow H(E) \geq 0 \quad H(E) = 0 \dots \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$H(E) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \Rightarrow p_i \log p_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \exists i^* \quad p_{i^*} = 1$$

$$p_i = 0 \quad i \neq i^*$$

$$2) g(x) = x \log x \quad g'(x) = 1 + \log x \quad g''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

$x \in (0, 1) \quad g(x)$ выпуклая вниз

$$d_1, \dots, d_n : d_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n d_i = 1, y_1, \dots, y_n$$

$$g\left(\sum_{i=1}^n d_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d_i g(y_i) - \text{с.в. выпуклой вниз ф-ии}$$

$$H(E_0) = -\log \frac{1}{n} = -n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -n \underbrace{\frac{\sum p_i}{n} \log \frac{\sum p_i}{n}}_{g\left(\sum_{i=1}^n d_i y_i\right)}$$

$$> -n \sum \frac{1}{n} p_i \log p_i = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i = H(E).$$

$$d_i = \frac{1}{n}, y_i = p_i$$

$$3) H(E) - H(E_1) = -\sum_{k=1}^n p_k \log p_k + \sum_{k=1}^n p_k \log p_k +$$

$$+ (p_i + p_j) \log(p_i + p_j) = -p_i \log p_i - p_j \log p_j +$$

$$+ (p_i + p_j) \log(p_i + p_j) = (p_i + p_j) \left(-\frac{p_i}{p_i + p_j} \log p_i - \right.$$

$$\left. - \frac{p_j}{p_i + p_j} \log p_j + \frac{p_i}{p_i + p_j} \log(p_i + p_j) + \frac{p_j}{p_i + p_j} \log(p_i + p_j) \right) =$$

$$= (p_i + p_j) \left(-\frac{p_i}{p_i + p_j} \log \frac{p_i}{p_i + p_j} - \frac{p_j}{p_i + p_j} \log \frac{p_j}{p_i + p_j} \right) = (p_i + p_j) \cdot H(E_2).$$

4) очевидно

△

Теорема (Радеева)

$\mathcal{H}$ -функционал, зависит от $p_1, \dots, p_n$ и удовлетворяет св-вам 1)-4) $\Rightarrow \mathcal{H}(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$.

D-во

$\mathcal{H}$ - простое с.в. $p(s = x_i) = p_i$ $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

$\mathcal{H}(s) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$. Обозначим $p(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i, i = \overline{1, n} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Тогда $\mathcal{H}(s) = - E \log p(s)$. (фактически аналог плотности)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Если число исходов бесконечно, то ряд может} \\ \text{не сходиться.} \end{array} \right.$

$\mathcal{H}(p(x))$ - плотность абс. непр-ой с.в. $\mathcal{H} = - E \log p(s)$ - ?

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Интеграл, который может сходиться или не сходиться} \end{array} \right.$

X - абс. непр. с.в.

X_δ - пос-ть простых с.в. $X_\delta \xrightarrow[n.в.]{\delta \rightarrow 0} X$ и $X_\delta \Rightarrow X$.

X_δ : Δ_i - промежутки ин-ва значений X . x_i^* - значения из Δ_i , $\delta = |\Delta_i|$. $P(X_\delta = x_i^*) = P(X \in \Delta_i)$.

$\mathcal{H}(X_\delta) = - \sum_{i=1}^n P(X \in \Delta_i) \log P(X \in \Delta_i) = - \sum_{i=1}^n \delta p(x_i) \log$

$p(x_i) = - \sum_{i=1}^n \delta p(x_i^*) \log \delta - \sum_{i=1}^n \delta p(x_i) \log$ запишем через плотность потерпее о среднем

$\log p(x_i) = - \sum_{i=1}^n P(X \in \Delta_i) \log \delta -$ из-за какой-то средней точки умно-

$\sum_{i=1}^n \delta p(x_i) \log p(x_i) = - \log \delta - \sum_{i=1}^n \delta$ посты на данную точку

$\circ p(x_i) \log p(x_i) \sim - \log \delta - E \log p(x)$ интеграл $E \log p(x)$

$\mathcal{H}^*(X) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{H}(X_\delta) + \log \delta)$ - дифференциальная энтропия.

$$\mathcal{H}^*(X) = - E \log p(X).$$

Δ

$$\xi: \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{matrix}$$

$$H(\xi) = \sum_{i=1}^n p_i \log p_i = -E \log p(s)$$

$$p(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

ξ - абс. вып. $H^*(\xi) = -E \log p(s)$ $p(x)$ - плотность

$$\lim_{\delta \xrightarrow{n.b.} 0} (H(\xi_\delta) + \log \delta) = H^*(\xi) - \text{дифф. энтропия}$$

$$\exists F(x, p(x)). \quad J(p) = \int_a^b F(x, p(x)) dx \quad (a < b) -$$

- функционал.

$$\exists \psi_1(x, p(x)), \dots, \psi_n(x, p(x)), a_1, \dots, a_n - \text{числа}$$

$$\text{Цель: } J(p) \rightarrow \max, \text{ при условии } \int_a^b \psi_i(x, p(x)) dx = a_i, \\ i = \overline{1, n}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial p} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \psi_n}{\partial p} = 0$$

Теорема 1) $\exists X \sim U[-a, a], Y: P(|Y| < a) = 1$ - произвольная с.в., тоже распределенная на $[-a, a]$. Тогда

$H(X) \geq H(Y)$ (отсюда и далее H - обозначение дифференциальной энтропии).

2) $\exists X \sim P(\lambda)$ $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} I(x > 0), Y: P(Y > 0) = 1, EY = \frac{1}{\lambda}$. Тогда $H(X) \geq H(Y)$.

3) $\exists X \sim N(a, \sigma^2), Y: EY = a, DY = \sigma^2$. Тогда $H(X) \geq H(Y)$.

D-во:

$$1) F(x, p) = -p \log p$$

$$J(p) = - \int p \log p(x) dx$$

$$\varphi_1(x, p) = p \quad \int_{-a}^a p(x) dx = 1$$

$$-(1 + \log p) + \lambda_1 = 0 \quad p = e^{\lambda_1 - 1}$$

$$p = \frac{1}{2a} \mathbb{I}(x \in [-a, a])$$

$$2) F(x, p) = -p \log p$$

$$J(p) = - \int p \log p dx$$

$$\varphi_1(x, p) = p \quad \varphi_2(x, p) = xp$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x, p) dx = 1, \quad \int_0^\infty \varphi_2(x, p) dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$p(x) = e^{\lambda_2 x + \lambda_1 - 1} \quad \int_0^\infty xp(x) dx$$

$$-(1 + \log p) + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$$

$$3) \varphi_1(x, p) = p, \quad \varphi_2(x, p) = xp, \quad \varphi_3(x, p) = (x-a)^2 p$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2 dx = a \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_3 dx = \sigma^2$$

$$-(1 + \log p) + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x-a)^2$$

$$p(x) = e^{\lambda_3 (x-a)^2 + \lambda_2 x + \lambda_1 - 1}$$

△

Пуассоновские процессы.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - вер-е пр-во

T - парам. ин-во

Опр. Семейство с.в. $X(t, \omega), t \in T$, заданное на одном вер. пр-ве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ наз. случайным процессом.

например $X_1, \dots, X_2$ - сл. пр.

если $T \subset \mathbb{Z} \Rightarrow X(t)$ - процесс с дискр. временем

или T - отрезок (прямая, полупрямая) $\Rightarrow$

$X(t)$ - процесс с непрерыв. временем

При ^{фикс.} $\omega_0: X(t, \omega_0)$ - траектория сл. процесса.

$X(t, \omega)$ - процесс с непрерывным временем

$$P(\max_{t \in [t_1, t_2]} X(t) < A)$$



Опр. $\mathcal{S}$ - ин-во всех траекторий случайного процесса,

Σ - борелевские Σ -алгебры на $\mathcal{S}$

$$X: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{S}, \Sigma)$$

$\forall B \in \Sigma \{ \omega: X \in B \} \in \mathcal{A}$ (процесс всегда измеримый).

$\forall B \in \Sigma P_x(B) = P(X \in B)$ - распределение случайного процесса $X(t)$.

При фикс. $t_0, t_1, \dots, t_n: X(t_0), \dots, X(t_n)$. Распреде-

ни этого вектора - конечное распределение
случайного процесса.

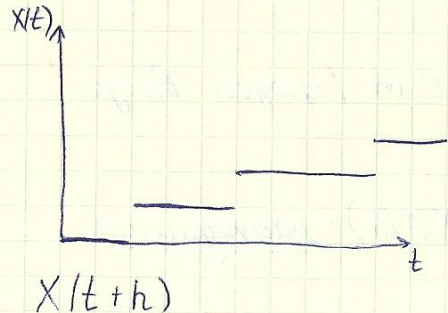
Опр. Сл. процесс $X(t)$ наз. процессом с независи-
мыми приращениями, если $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$
 $X(t_n) - X(t_{n-1}), \dots, X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_0)$ независимы.

Опр. Сл. процесс $X(t)$ наз. однородным $\forall t, s, s+h \in T$
 $X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$ одинаково распр.

Опр. $X(t)$ - пуассоновский, если

- 1) $X(0) = 0$ п.н.
- 2) $X(t)$ - процесс с независимыми приращениями
- 3) $X(t)$ - однородн.
- 4) $\exists \lambda > 0$ при $h \downarrow 0$ $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
 $P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ $P(X(h) \geq 2) = o(h)$.

Из определения не следует существование этого
объекта.



$$\varphi_{t+h}(s) = E e^{sX(t+h)} = E e^{s(X(t+h) - X(t) + X(t))} = E e^{s(X(t+h) - X(t))} E e^{sX(t)}$$

$$= E e^{s(X(t+h) - X(t))} \underbrace{E e^{sX(t)}}_{\varphi_t(s)} = E e^{s(X(t+h) - X(t))} \text{ одноп. } E e^{s(X(h) - X(0))}$$

↑
нз. приращ.

$$= E e^{sX(h)} = 1 - \lambda h + o(h) + \lambda h s + o(h) + o(h) =$$

$$= 1 + \lambda h(s-1) + o(h)$$

$$\varphi_{t+h}(s) = \varphi_t(s) / (1 + \lambda h(s-1) + o(h))$$

$$\frac{\varphi_{t+h}(s) - \varphi_t(s)}{h} = \varphi_t(s) \lambda(s-1) + o(1)$$

$$h \downarrow 0 \quad \frac{\partial \varphi_t(s)}{\partial t} = \varphi_t(s) \lambda(s-1)$$

$$\varphi_0(s) = 1 \quad \varphi_t(s) = e^{\lambda t(s-1)}$$

$$EX(t) = DX(t) = \lambda t$$

λ - интенсивность процесса пуассоновского (среднее
кол-во единиц за единицу времени)

Пуассоновский процесс.

$X(t)$

1. $X(0) = 0$ п.н.

2. $X(t)$ - процесс с независимыми приращениями

3. $X(t)$ - однородный процесс

4. $\exists \lambda > 0 \quad h \downarrow 0 \quad P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

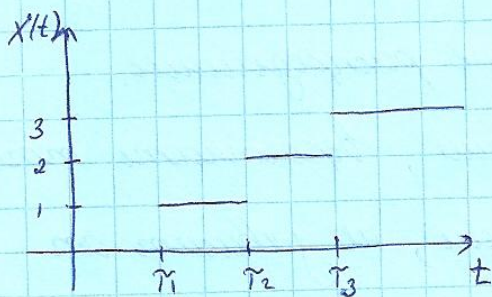
$$P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(h) \geq 2) = o(h)$$

λ - интенсивность пуассоновского процесса

$$X(t) = \Pi(\lambda t)$$

$$EX(t) = DX(t) = \lambda t$$



Обозначим $z_1 = \tau_1 - \tau_0$ (Положим $\tau_0 = 0$)

$$z_2 = \tau_2 - \tau_1$$

характеризует сколько прошло времени между скачками.

$$\{\tau_1 > t\} = \{X(t) = 0\}$$

$$P(\tau_1 \leq t) = 1 - P(\tau_1 > t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

показательное распределение

Время ожидания между скачками имеет показательное распределение, а оно самое непредсказуемое среди всех распределений — первое информационное свойство.

Еще одно свойство показательного распределения - отсутствие памяти (не стареет):

$$\begin{aligned} & \{T > t\} \quad u(t) = P(T > t) \\ & u(t+s) = P(T > t+s | T > s) = \frac{P(T > t+s, T > s)}{P(T > s)} = \\ & = \frac{P(T > t+s)}{P(T > s)} = \frac{u(t+s)}{u(s)} \\ & \quad u(t+s) = u(s) u(t+s). \end{aligned}$$

Асимптотическая симметрия означает $U(t|S) = U(t)$

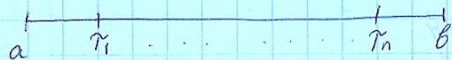
$$u(t+s) = u(s)u(t) \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \text{ - решение.}$$

Паукаши показательное распределение.

Сколько бы мы ни ждали, возврата того,
сколько мы еще пройдем, не зависит от
того, сколько мы уже не пройдем.

У пуассоновского процесса всегда показательное распределение.

В $[a, b]$ n скачков пуассоновского процесса.



Теорема Условное распределение $(T_1, \dots, T_n)$ при условии $X(b) - X(a) = n$ с распределением вариационного ряда, построенного по выборке объема n из $U[a, b]$ (второе информационное свойство).

D-60.

$(\eta_1, \dots, \eta_n)$ - су вектор е плотностно $f(t_1, \dots, t_n)$
 $P(\eta_i \in [t_i, t_i + h], i = \overline{1, n}) = f(t_1, \dots, t_n) h^n + o(h^n)$
 $a = t_0 + h < t_1 < t_1 + h < \dots < t_n < t_n + h < t_{n+1} = b$
 $h < \min(t_i - t_{i-1})$

$$\frac{P(\tau_i \in [t_i, t_i + h], i = \overline{1, n} \mid X(b) - X(a) = n)}{P(X(b) - X(a) = n)} \quad (\approx)$$

$$\begin{aligned}
 P(X(\beta) - X(a)) &= \frac{(\lambda(\beta - a))^n e^{-\lambda(\beta - a)}}{n!} \\
 P(\tau_i \in [t_i, t_i + h], i = 1, n, X(\beta) - X(a) = n) &= \\
 = P(X(t_i + h) - X(t_i)) &= 1, i = 1, n, \\
 X(t_i) - X(t_{i-1} + h) &= 0, i = 1, n+1) = \cancel{\lambda h e^{-\lambda}} \\
 = \prod_{i=1}^n P(X(t_i + h) - X(t_i) &= 1) \prod_{i=1}^n P(X(t_i) - X(t_{i-1} + h) = 0) \\
 = (\lambda h e^{-\lambda}) e^{-\lambda(t_1 - a + t_2 - t_1 - h + \dots + \beta - t_n - h)} &= \\
 = (\lambda h) e^{-\lambda(\beta - a)} &
 \end{aligned}$$

$$\ominus \frac{h^n n!}{(b-a)^n} (t_n > t_{n-1} > \dots > t_1)$$

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{n h^n}{(b-a)^n} I(t_n > t)$$

$$t_1, \dots, t_n \mid X(b) - X(a) = n$$

↑
плотность вариационного ряда $\sim U(a, b)$

Если положить в теореме $S_1 = T_1 - T_0$ Δ

$$S_2 = T_2 - T_1$$

...

$$T_i = S_1 + \dots + S_i, i = \overline{1, n}$$

Положим $a = h, b = t_n + h$.

$$f_{T_1, \dots, T_n}(t_1, \dots, t_n) = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$$

$$P(T_1 < t_1, \dots, T_n < t_n) = \int_{u_1 < t_1} \dots \int_{u_n < t_n} f_{T_1, \dots, T_n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

||

$$P(S_1 < t_1, \dots, S_1 + \dots + S_n < t_n) = \int_{v_1 < t_1} \dots \int_{v_1 + \dots + v_n < t_n} f_{S_1, \dots, S_n}(v_1, \dots, v_n) dv_1 \dots dv_n$$

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ \dots \\ u_n = v_1 + \dots + v_n \end{cases}$$

Якобиан перехода $|T| = 1 \Rightarrow f_{S_1, \dots, S_n}(s_1, \dots, s_n) =$

$$= f_{T_1, \dots, T_n}(s_1, \dots, s_1 + \dots + s_n)$$

Теорема $X(t)$ - пуассоновский процесс
 $P\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) \rightarrow \Phi(x).$

$$\Delta(\lambda t) = \left| P\left(\frac{X(t) - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}}$$

(третье информационное свойство)

C_0 - константа из неравенства Бернштейна

Д-во:

$$f_{X(t)}(s) = E e^{isX(t)} = e^{\lambda t(e^{is} - 1)}$$

$$\forall n \geq 1 \quad e^{\lambda t(e^{is} - 1)} = \left(e^{\frac{\lambda t}{n}(e^{is} - 1)} \right)^n$$

$$X(t) \stackrel{d}{=} X_{n,1} + \dots + X_{n,n}, X_{n,i} - \text{н.о.р.с.в.} \sim \Pi\left(\frac{\lambda t}{n}\right)$$

$$EX_{n,i} = \frac{\lambda t}{n} \quad DX_{n,i} = \frac{\lambda t}{n}$$

$$\Delta(\lambda t) = \frac{C_0 E |X_{n,1} - \frac{\lambda t}{n}|^3}{(DX_{n,1})^{3/2} \sqrt{n}}$$

$$I_{n,i}: n > \lambda t: E |X_{n,1} - \frac{\lambda t}{n}|^3 = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n,1} = k) \left| k - \frac{\lambda t}{n} \right|^3 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n,1} = k) \left| k - \frac{\lambda t}{n} \right|^3 + 2 \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^3 e^{-\frac{\lambda t}{n}} =$$

$$= \frac{\lambda t}{n} + 2 \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^3 e^{-\frac{\lambda t}{n}} \leq \frac{\lambda t}{n} \left(1 + 2 \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^2 \right)$$

$$\Delta(\lambda t) \leq \frac{C_0}{\sqrt{\lambda t}} \left(1 + 2^n \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^2 \right)^n \rightarrow \infty$$

Δ

Случайные суммы.

Опр. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ определены $X_1, X_2, \dots$ - н.с.в. и с.в.

N - целочисленная и неотрицательная, $N, X_1, X_2, \dots$ - н.с.в.

Тогда $S_N = \sum_{k=1}^N X_k = X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega)$ - случайная сумма. ($\sum_{k=1}^0 = 0$).

Обозн.: $p_n = P(N=n)$, $n=0, 1, \dots$, $F * F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y) dF(y)$

$F(x)$ - ф.р. X , $p(x)$ - плотность X , $f(t)$ - характеристическая ф.-я X , $\psi(s)$ - преобразующая ср.-я N .

Теорема 1) $F_{S_N}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{*k}(x)$, где F^{*k} - k -кратная свертка $F(x)$, если $k=0$ $F^{*0}(x)$ - вырожденная в нуле ф.р.

2) если $p_0 > 0$ для $k=0$, тогда S_N не является абсолютно непрерывной, даже если X_i абс. непр.

если $p_0 = 0$ и $p(x)$ - плотность X , тогда у сл. суммы

$$\exists \text{ плотность } p_{S_N}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k p^{*k}(x)$$

$$3) f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$$

$$4) ES_N = ENEX_1, DS_N = DN(EX_1)^2 + DX_1EN.$$

Д-во.

$$\begin{aligned} 1) F_{S_N}(x) &= P(S_N \leq x) = P\left(\sum_{k=1}^N X_k \leq x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^N X_k \leq x, N=n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{P\left(\sum_{k=1}^N X_k \leq x, N=n\right)}{P(N=n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{P\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq x, N=n\right)}{P(N=n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{P\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq x\right) P(N=n)}{P(N=n)} \rightarrow P\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq x\right) = F^{*n}(x) \end{aligned}$$

т.к. X_k не зависят

2) если $p_0 > 0$, то $F^{*0}(x)$, а она имеет скачок, т.е. разрывна

если $p_0 = 0 \Rightarrow$ в силу равномерной сходимости

ряда можно почленно дифференцировать

$$3) f_{S_N}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{S_N}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{*k}(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF^{*k}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F^k(t) = \Psi(f(t))$$

$$\Psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

$$4) f(t) = E e^{itX_1}$$

$$(f(t))'_{t=0} = i E X_1 e^{itX_1} \Big|_{t=0} = i E X_1$$

$$E X_1 = \frac{f'(t)}{i}$$

$$\Psi(s) = E s^{S_N}$$

$$(\Psi(s))'_{s=1} = E s^{S_N-1} (N s^{N-1}) \Big|_{s=1} = E N$$

$$(\Psi(s))''_{s=1} = E N(N-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(f(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \Psi(f(t))}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} = i E N E X_1$$

$$\Rightarrow E S^N = E N E X_1, E S_N = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} f_{S_N}(t)$$

$$E S_N^2 = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=0} + \frac{\partial \Psi}{\partial f} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \right) =$$

$$= E(N(N-1)(E X_1)^2) + E N E X_1^2 = (E N^2 - E N)(E X_1)^2 + E N E X_1^2 =$$

$$= E N^2 E X_1^2 + E N D X_1$$

$$D S_N = E S_N^2 - (E S_N)^2 = D N (E X_1)^2 + D X_1 E N$$

△

① Если $N \sim \Pi(\lambda)$, то S_λ - пуассоновская случайная величина

Утв. 1 1) пуассоновская случайная величина безгранично делима. $f_{S_\lambda}(t) = e^{\lambda(f(t)-1)} = \left(e^{\frac{\lambda}{n}(f(t)-1)} \right)^n$, $e^{\frac{\lambda}{n}(f(t)-1)}$ - х.ф. $S_{\frac{\lambda}{n}}$.

$$2) E S_\lambda = \lambda E X_1, D S_\lambda = \lambda E X_1^2 (E N = D N = \lambda)$$

3) распределением любой S_λ , то ее распределение

обобщением пуассоновского распределения

Теорема $N_\lambda \sim \Pi(\lambda)$ $X_1, X_2, \dots$ - н.о.р.с.в., $E X_1 = a, D X_1 = \sigma^2$,

$\forall \lambda: N_\lambda, X_1, \dots$ независ. в. Тогда $P\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \Phi(x)$,

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_\lambda - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0 L_1}{\sqrt{\lambda}}, L_1 = \frac{E |X_1|^3}{(a^2 + \sigma^2)^{3/2}}$$

② $M \sim \text{Geom}(p)$ $P(M=k) = p(1-p)^k, k=0, \dots$

$$E M = \frac{1-p}{p}, D M = \frac{1-p}{p^2}, \Psi_M(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$$

Теорема Реньи $G(x)$ - ф-я распр-я стандартного

показательного закона (т.е. с параметром 1),

$X_1, X_2, \dots$ - н.о.р.с.в., $X_i \geq 0, a = E X_1, 0 < a < \infty$

(запретили вырожденность в 0), $M \sim \text{Geom}(p)$,

S_M - геометрическая случайная величина. Тогда

$P\left(\frac{S_M}{a} < x\right) \xrightarrow{p \rightarrow 0} G(x)$ и если $\sigma^2 = E X_1^2$, то

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_M}{a} < x\right) - G(x) \right| \leq \frac{p \sigma^2}{(1-p)a^2}$$

Связь между пуассоновскими и геометрическими случайными суммами.

Лемма 1 $\mathbb{I}M$ -целочисленная неотрицательная обобщенная пуассоновская случайная величина $\Rightarrow S_M$ -пуассоновская случайная сумма.

D-во.

$\Psi_M(S) = e^{\lambda(\Psi(S)-1)}$, $\Psi(S)$ -некоторая производящая ф-я.

$f_{S_M} = e^{\lambda(\Psi(f(t))-1)}$ $\Rightarrow S_M \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N$, где $N \sim \Pi(\lambda)$, по теореме

$Y_i \sim \Psi(f(t))$ (Y -случайные суммы с производящей ф-ей $\Psi(f(t))$), т.е. $Y_i \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_L$, $L \sim \Psi(S)$. Δ

Лемма 2 $\mathbb{I}M \sim \text{вот}(p) \Rightarrow M$ -обобщенная пуассоновская случайная величина.

D-во.

Обозн. $\lambda = \log \frac{1}{p}$, $\Psi(S) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-(1-p)S}$.

$e^{\lambda(\Psi(S)-1)} = e^{\lambda(\frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-(1-p)S} - 1)} = \frac{p}{1-(1-p)S}$ - производящая

ф-я $\text{вот}(p)$.

Остается доказать, что $\Psi(S)$ -производящая ф-я.

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

$$\Psi(S) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((1-p)S)^k}{k}.$$

$$p_k = \frac{1}{\log \frac{1}{p}} \frac{(1-p)^k}{k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$, $p_k > 0$, т.е. эта сумма задает дискретное распределение - распределение логарифмического ряда $\Rightarrow$ имеем дело с произв. ф-ей этого расп-я. Δ

Теорема $\mathbb{I}S_M$ -геометрическая случайная сумма,

$S_M = X_1 + \dots + X_N$. Тогда $S_M \stackrel{d}{=} S_N \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N$, $N \sim \Pi(\log \frac{1}{p})$.

($M \sim \text{вот}(p)$) $Y_i \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_L$, L -логарифмическое расп-е. это в дано

Следствие $\mathbb{I}S_M$ -геометрическая случайная сумма $\Rightarrow$

S_M бесконечно делима.

Утв. Если $g(t) = \frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}}$ является жорж-ой ф-ей, $N \sim \Pi(\lambda)$ $\Rightarrow$

S_N явл. случайной геом. суммой с параметром

$$p = e^{-\lambda}.$$

D-во.

$$\frac{e^{-\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda})g(t)} = \frac{e^{-\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda f(t)})} = e^{\lambda(f(t)-1)}$$

Δ

Для пуасс. сумм справедлива ЦПТ

Случайные суммы.

$\{X_{n,i}\}$ - схема серий, $S_{n,k} = \sum_{i=1}^k X_{n,i}$

Теорема (перехода) $\exists \{m_n\}$ - пос-ть истинных чисел и ф.р. $H(x)$ и $A(x)$, такие, что

$$P(S_{n,k} < x) \rightarrow H(x)$$

$$P\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right) \rightarrow A(x)$$

$$S_{n,N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i} \quad N_n, X_n, \dots \text{ н.с.в.}$$

Тогда $P(S_{n,N_n} < x) \rightarrow F(x)$, где $F(x)$ - ф.р.
соотв. хар. ф. $f(t) = \int_0^\infty h(t) dA(u)$, $h(t)$ - х.ф. $H(x)$.

Д-во.

$$g_n(t) = E e^{itX_{n,1}}, \quad h_n(t) = g_n^{m_n}(t),$$

$$A_n(x) = P\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right) \text{ - ввещи обозн-я.}$$

$$f_n(t) = E e^{it \sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}} \text{ - х.ф. случайной суммы}$$

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k) E e^{it \sum_{i=1}^k X_{n,i}} = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) g_n^k(t) =$$
$$= \int_0^\infty g_n^u dP\left(\frac{N_n}{m_n} < u\right) = \int_0^\infty g_n^{u'm_n} dA_n(u) = \int_0^\infty g_n^{u'm_n}(t) dA_n(u).$$

$$dP\left(\frac{N_n}{m_n} < u'\right) = \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u).$$

$$\text{Для } \forall \text{ фиксированного } t \quad |f_n(t) - f(t)| =$$

$$= \left| \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA(u) \right| =$$

$$= \left| \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) + \int_0^\infty h_n^u(t) dA(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA(u) \right| \leq$$

$$= \left| \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA(u) \right|$$

$$+ \left| \int_0^{\infty} h^n(t) dA_n(u) - \int_0^{\infty} h^n(t) dA(u) \right| = I_1(n) + I_2(n)$$

Можно оценивать $I_2(n)$.

$\exists N$ - с. в. в е. ф. с. р. $A(u)$

$$\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow N \Leftrightarrow \forall \text{ непрерыв. и отв. ф. } \varphi: E\varphi\left(\frac{N_n}{m_n}\right) \rightarrow E\varphi(N)$$

(отр. е. слабо сходимость)

$$\varphi(u) = z^u, \quad z = h(t) \quad \text{при } |z| \leq 1$$

$$u(n) \text{ непрерыв. и отв.} \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad I_2(n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_1(n) = \left| \int_0^{\infty} h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^{\infty} h^u(t) dA_n(u) \right| \leq \left| \int_0^M |h^u(t) - h_n^u(t)| dA_n(u) \right| + \left| \int_M^{\infty} |h_n^u(t) - h^u(t)| dA_n(u) \right|$$

$$dA_n(u) = I_1(n) + I_2(n)$$

$$I_2(n) = \int_0^{\infty} |h_n^u(t) - h^u(t)| dA_n(u) \quad \text{с. в.}$$

Отр. семейство $\{Z_n\}$ (или $\{F_n\}$) называется слабо компактным, если из $\forall$ под-ти этого семейства можно выделить подпоследовательность, которая слабо сходится.

Утв. Сл-во $\{Z_n\}$ слабо компактно $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n P(|Z_n| > M) = 0$$

$$F_n(-M) + (-F_n(M))$$

$$\textcircled{2} \int_M^{\infty} (|h_n^u(t)| + |h^u(t)|) dA_n(u) \leq 2 \int_M^{\infty} dA_n(u) = 2(1 - A_n(M)) \leq 2 \sup (1 - A_n(M))$$

Семейство $\{A_n\}$ - слабо компактно (т.к. $A_n \Rightarrow A$)

$$\exists M(\varepsilon) : I_2(n) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$I_1(n)$: Утв. $\exists \psi(z)$ - групп. ф. в одн. U

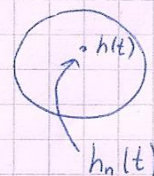
$$[a, b] \subseteq U \quad |\psi(b) - \psi(a)| \leq |b - a| \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |\psi'(\alpha a + (1-\alpha)b)|$$

$$\psi(z) = z^u \quad \psi'(z) = uz^{u-1}$$

$$|h_n^u(t) - h^u(t)| \leq |h_n(t) - h(t)| u \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)|^{u-1} \leq u |h_n(t) - h(t)| \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \frac{1}{|\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)|}$$

$h(t)$ - отв. гр. группа (по теореме Хинчина)

$\Rightarrow h(t) \neq 0 \quad \forall t$



$$\Rightarrow |\alpha h_n(t) + (1-\alpha)h(t)| > \delta, \text{ начиная с некоторого } n. \quad I_1(n) \leq \int_0^M \frac{u}{\delta} |h_n(t) - h(t)| dA_n(u) \leq \frac{M}{\delta} \int_0^{\infty} |h_n(t) - h(t)| dA_n(u) = \frac{M}{\delta} |h_n(t) - h(t)| \Rightarrow \exists N(\varepsilon, M) : \forall n > N(\varepsilon, M)$$

$$I_1(n) < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon. \quad \Delta$$

$$S_{n,k} \Rightarrow \forall \quad \frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U$$

$$S_{n,N_n} \Rightarrow Z \quad f_2(t) = E h_n^u(t) \quad h(t) - \text{х.ф. } Y$$

Теорема $\{X_{n,i}\}$ - схема серий $\{a_n\}, \{c_n\}$ - посл. действ. чисел, $\{m_n\}$ - посл. натур. чисел.

$$\{S_{n,m_n} - a_n \Rightarrow Y, \frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U, a_n \frac{N_n}{m_n} - c_n \Rightarrow V$$

Тогда $S_{n,m_n} - c_n \Rightarrow Z$ с х.р. $f(t) = E[h^u(t)e^{itv}]$,
Д-во:

если V - вырожденная $\Rightarrow$ с точностью до несмещенного сдвига теорема переноса

если U - вырожденная ($P(U=1)=1$) $\Rightarrow$

$f(t) = h(t) E e^{itv}$ - распр.; $Y+V$ (Y и V независимые)

- сдвиговая схема.

$\{X_{n,i}\}$ - схема серий, $\exists \{m_n\} \in N$

$$\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow N \sim A(u)$$

$$S_{n,m_n} \Rightarrow S \sim H(x)$$

$$S_{n,N_n} \Rightarrow Z \sim F(x): f(t) = \int_0^\infty h^u(t) dA(u)$$

$h(t)$ - х.р. $H(x)$.

Аналог теоремы пуассона для суммируемых схем.

$\{X_{p,j}\}$ - семейство индикаторов

$$X_{p,j} \sim \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$$

$$S_p = \sum_{j=1}^{M_p} X_{p,j}$$

N_p - целочисленная неотрицательная с.в.

$N_p, X_{p,1}, \dots$ н.с.в.

$X_{p,j}$ - индикатор наступивших страхового случая

N - количество договоров определенного типа, заключенных за определенный период

S_p - общее количество наступивших страховых случаев по портфелю

Теорема $\square$ при $p \rightarrow 0$ $p N_p \Rightarrow N$ Тогда
 $S_p \Rightarrow S$ $P(S=k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-z} z^k dA(z) \quad \ominus$

$A(z)$ - ф.р. N .

$\ominus E \frac{e^{-N} N^k}{k!}$ - смешанное пуассоновское распределение.

Д-во:

$\square p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ произвольная последовательность.

Тогда $p_n N_{p_n} = \left[\frac{N_{p_n}}{1/p_n} \right] p_n$, $m_n = \left[\frac{1}{p_n} \right]$.

$$\frac{N_{p_n}}{m_n} \Rightarrow N$$

$$\text{т.к. } p_n \left[\frac{1}{p_n} \right] \rightarrow 1$$

$$S_{n, m_n} = \sum_{j=1}^{m_n} X_{p_n, j} \quad (\Rightarrow)$$

Вспомогательную теорему Пуассона $\{X_{p_n, j}\}$,
 $S_n = \sum_{j=1}^n X_{p_n, j}$, $p_n \cdot n \rightarrow \lambda \Rightarrow S_n \Rightarrow S \sim \Pi(\lambda)$

В нашем случае $n = m_n$ и $p_n \cdot n \rightarrow 1$.

$$\Rightarrow Z \sim \Pi(1)$$

$$f_Z(t) = e^{e^t - 1}$$

По теореме переноса $f_S(t) = \int_0^\infty e^{z(e^t - 1)} dA(z)$ -

- х.ф. смешанного пуассоновского распределения.

$\triangle$

Если в теореме переноса $H(x) = P(x) (N(0,1))$,
 то $F(x) = \int_0^\infty P\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u)$ - соответствует
 предельный закон для случайных сумм

распределения $\sqrt{u} \cdot X$, где $X \sim N(0,1)$, $u \sim A(u)$,
 $\sqrt{u}$ и X - независимы. (масштабная сумма)

$$P(\sqrt{u} X < y) = P\left(X < \frac{y}{\sqrt{u}}\right) = E P\left(X < \frac{y}{\sqrt{u}} \mid u\right)$$

$$\text{х.ф. } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(\int_0^\infty P\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dA(u)\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \sum_{y=x}^{\infty} dy \int_0^\infty P(y) dA(u) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} e^{itxy} dP(y) dA(u) \quad \ominus$$

$$\ominus \int_0^\infty \varphi(t\sqrt{u}) dA(u) = \int_0^\infty \varphi^u(t) dA(u)$$

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ - ст. норм. закон}$$

$$\varphi(t\sqrt{u}) = \varphi^u(t)$$

Σ -б-ан. на Y

Опр. $\square$ дана ф-я $F(x, y)$, $(x, y) \in R \times Y$, $Y \subset R^m$,

$F(x, y)$ такова, что: 1) при $\forall$ фикс. $y \in Y$,

$F(x, y)$ - функция распределения;

2) при $\forall$ фикс. x $F(x, y)$ непрерывна относительно Σ

$G(y)$ - ф. распр. на (Y, Σ) , (Y, Σ, G) - вероятностное пространство.

Тогда $H(x) = \int_Y F(x, y) dG(y)$ - сумма, где F - смешивающее, G - смешивающее распределение.

Z - тождеств. с.в. на (Y, Σ, G)

$$Z(y) = y$$

$$H(x) = EF(x, Z)$$

Если у F есть плотность f , то и у смеси есть плотность $h(x) = Ef(x, z)$ для любого y .

Вернемся к масштабным смесям. Класс масштабных смесей нормальных законов.

1) норм. распределение $\sim \frac{e^{-ax^2}}{x}, x \rightarrow \infty$

2) распр Лапласа $\sim e^{-ax}$

3) распр Стюдента $\sim \frac{1}{x^2}$

4) распр Коши $\sim \frac{1}{x}$

$h(t) = E \tilde{h}^u(t) e^{itv}$ - в теории преобразования

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Если } \tilde{h}(t) \sim N(0, 1) \end{array} \right.$

$H(x) \sim XU + V, X \sim N(0, 1) (U, V) - \text{с. вектор,}$

X и (U, V) независимы, $U > 0, \forall V \in R$.

Тогда $H(x)$ - сдвин-масштабная смесь.

$H(x) = EF\left(\frac{x-V}{U}\right)$, плотность (если F):

$h(x) = E \frac{1}{U} F\left(\frac{x-V}{U}\right)$.

Дискретная смесь.

$H(x) = \sum_{j=1}^n p_j F(x, y_j) \ominus G \begin{matrix} y_1 & \dots & y_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{matrix}$
 $\ominus \sum p_j F(x)$

Потупция состоит из k субпотупций

$F_j(x)$ - распределение признака при условии, что индив. выбран из j -й субпотупции,
 p_j - вероятности выбрать инд. из j -й субпот.

$H(x)$ - распределение признака во всей потупции.

Обратная задача - разделение смесей. Разделить - найти смешивающее распределение.

Опр. $F(x, y)$ - смешивающее распр-е (удовлет-ет опр.), $(x, y) \in R \times Y, \Sigma$ - σ -алгебра на $Y, \mathcal{Q}$ - семейство случайных величин на (Y, Σ) .

Тогда $\mathcal{H} = \{H(x) : H(x) = EF(x, Q), Q \in \mathcal{Q}\}$ -

- семейство смесей. $\mathcal{H}$ - идентифицируемо, если

из равенства $EF(x, Q_1) = EF(x, Q_2), \forall x \in R, Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ следует, что $Q_1 \stackrel{d}{=} Q_2$ (имеют одно и то же распределение).

Пример неидентифицируемого семейства:

Вмесь: $\frac{1}{3} \cdot 3 I(x \in [0, \frac{1}{3}]) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} I(x \in [\frac{1}{3}, 1])$
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 I(x \in [0, \frac{1}{2}]) + \frac{1}{2} \cdot 2 I(x \in [\frac{1}{2}, 1])$

$H(x) = \sum_{j=1}^n p_j F_j(x), F_j$ - компоненты смеси,

p_j - веса компонент.

Идентифицируемость систем

$F(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times Y$, $Y \subset \mathbb{R}^m$,
 Σ - σ -алгебра на Y , $F(x, y)$ при $\forall$ фикс. y -
ф.р. по x , $F(x, y)$ измерима по y при $\forall$ фикс. x

$\mathcal{Q}$ -система с.в. на (Y, Σ) ,

$$\mathcal{H} = \{H(x) = EF(x, Q), Q \in \mathcal{Q}\}.$$

$\mathcal{H}$ идентифицируемо, если из рав-ва $EF(x, Q_1) =$
 $= EF(x, Q_2) \forall x \in \mathbb{R}, Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ следует $Q_1 \stackrel{d}{=} Q_2$.

$$(u, v), P(u > 0) = 1$$

$F\left(\frac{x-v}{u}\right)$, при $\forall$ фикс. (u, v) является ф.р.

$M(x) = EF\left(\frac{x-v}{u}\right)$ - сдвин-масштабная сиссв

$$\left\{ H(x), (u, v) \in \mathcal{Q} \right\}$$

с.в. $xu + v$, $x \sim F(x)$, $xu/(u, v)$ независимы

Сдвин-масшт. сиссв. наз. идентифицируемой,
если $x_1 u_1 + v_1 \stackrel{d}{=} x_2 u_2 + v_2 \Rightarrow (u_1, v_1) \stackrel{d}{=} (u_2, v_2)$.

Конечная сдвин-масштабная сиссв.:

$$M(x) = \sum_{j=1}^K p_j F\left(\frac{x-a_j}{\sigma_j}\right), a_j \in \mathbb{R}, \sigma_j > 0$$

идентифицируема, если

$$M(x) = \sum_{j=1}^K p_j F\left(\frac{x-a_j}{\sigma_j}\right) = \sum_{i=1}^m q_i F\left(\frac{x-b_i}{d_i}\right) = M(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow k=m, \forall j \exists i: p_j = q_i, a_j = b_i, \sigma_j = d_i.$

Опр. $\{F(x, y), y > 0\}$ - аддитивно замкнуто,

если $\forall y_1 > 0, y_2 > 0 \quad F(x, y_1) * F(x, y_2) =$
 $= F(x, y_1 + y_2).$

$F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_2(y)$ - корректная запись

Утв. 1. Семейство $\{F(x, y), y > 0\}$ - аддитивно замкнуто, $q = \{Q: P(Q > 0) = 1\}$. Тогда семейство сисей $\{EF(x, Q), Q \in q\}$ идентифицируемо.

Зам. Семейство масштабных сисей идентифицируемо.

Утв. 2. $\{F(x, y), y > 0, F(0) = 0\}$. Предположим, что $G(y) = F(e^y)$ такова, что преобразование Рунге-Штильеса $G(y) (\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy} dG(y))$ не обращается в 0. $q = \{Q: P(\tilde{Q} > 0) = 1\}$. Тогда семейство сисей $\{EF(x, Q), Q \in q\}$ - идентифицируемо.

Утв. 3. q - семейство всех возможных с. в. а $F(x)$ - ф.р., такая, что х.ф. $f(t) \neq 0 \forall t$.

Тогда семейство сисей $\{EF(x, Q), Q \in q\}$ идентифицируемо.
 с.в. $X + Q, X \perp Q \text{ и } q, X \sim F(x)$ сдвиговая сисей

D-во:

$$E e^{it(x+Q)} = E e^{itx} E e^{itQ}$$

$f(t)$

$$f(t) E e^{itQ_1} = f(t) E e^{itQ_2}$$

можно сократить на $f(t)$, т.к. $f(t) \neq 0 \forall t$
 $\Rightarrow Q_1$ и Q_2 имеют одинаковое распределение.

$\triangle$

Утв. 4 Конечная сдвиг-масштабная сисей нормальных законов идентифицируема.

Зам. В общем случае сисей нормальных законов не идентифицируема.

Настоящую сисей будем приближать дискретной.

Пример $X_1, X_2 \sim N(0, 1), U_1: P(U_1 = 1) = 1,$

$U_2: P(U_2 > 0) = 1, U_2$ - невырожденная (не конст.),

X_1, X_2, U_1, U_2 - независимы.

Рассм. сисей $X_1, U_2 + X_2$. Она имеет расп-е:

$$1) H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{x-v}{u}\right) dP(X_2 < v) dP(U_2 < u)$$

$$2) H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\frac{x-v}{u}\right) dP(X_1, U_2 < v) dP(U_1 < u)$$

гла
способа
записи

$$XU + V$$

$$1) (U, V) = (U_2, X_2)$$

$$2) (U, V) = (U_1, X_1 U_2)$$

$$(U_2, X_2) \stackrel{d}{\neq} (U_1, X_1 U_2) \Rightarrow \text{не идентифицируемо}$$

Обобщение пуассоновского процесса.

$N_\lambda(t)$ - пуассоновский процесс

$N_\lambda(0) = 0$ почти наверное

1) $N(t)$ - процесс с независимыми приращениями
 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ $N(t_0), N(t_1) - N(t_0), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$
 независ.

2) $N(t)$ - однородный $N(t+h) - N(t) \stackrel{d}{=} N(s+h) - N(s)$

3) λ : $P(N(h)=0) = 1 - \lambda h + o(h)$

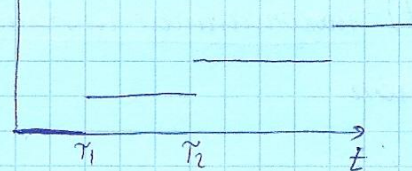
$$P(N(h)=1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(N(h) \geq 2) = o(h)$$

$\lambda > 0$ - интенсивности $N_\lambda(t)$

λ - среднее число скачков $EN_\lambda(t) = \lambda$

4) $N(t)$ траектория



5) Недостатки: отсутствие памяти экспоненциального распределения, однородность (т.к. реальные процессы неоднородные).

$N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс

$$P(N_1(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

$$P(N_1(t) = k) = P(N_1(\lambda t) = k).$$

$N^*(t)$ - неоднородный пуассоновский процесс

$$1) N^*(0) = 0 \text{ почти наверное}$$

$$2) P(N^*(t) = k) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}$$

$\Lambda(t)$ - неотрицательная интегрируемая функция. $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$

$$P(N^*(t) = k) = P(N_1(\Lambda(t)) = k)$$

$$EN^*(t) = \Lambda(t)$$

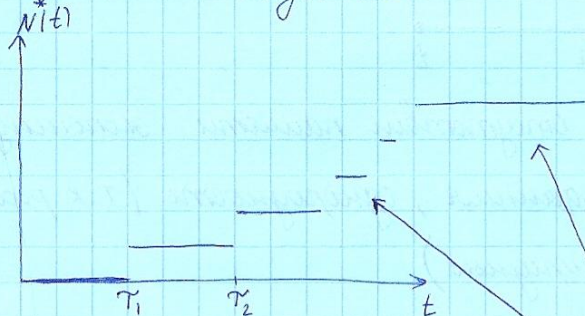
$$\frac{EN^*(t+h) - EN^*(t)}{h} = \frac{\Lambda(t+h) - \Lambda(t)}{h}$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0}$

$\lambda(t)$ - мгновенная интенсивность $N^*(t)$

$\Lambda(t)$ - накопленная интенсивность $N^*(t)$

$\lambda \geq 0 \Rightarrow \Lambda$ не убывает



В однородной были одинаковые промежутки времени

$\Lambda(t)$ - управляет процессом, но сама может быть случайной.

$\Lambda(t)$ - случайный процесс, т.ч.:

$$1) \Lambda(0) = 0 \text{ почти наверное}$$

$$2) P(\Lambda(t) < \infty) = 1 \quad \forall t - \text{график не уходит в бесконечность, нет асимптот}$$

3) траектории процесса $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа (договоренность)

$N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс

Опр. $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, где $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$ независимы

$\forall t$ называется двудви ст. процессом - процессом Кокса.

Если $N(\Lambda(t))$ допускает представление

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau, \text{ где } \lambda(\tau) - \text{процесс с нестр.}$$

интегр. приращ., то $\lambda(\tau)$ - мгновенная

стохастическая интенсивность процесса Кокса,

$\Lambda(t)$ - накопленная стохастическая интенсивность.

$$EN(t) = E(E N(t) | \Lambda(t)) = E \Lambda(t)$$

$$DN(t) = E \Lambda(t) + D \Lambda(t)$$